INTRODUCCIÓN

Durante el cursillo de DERIVE celebrado en Octubre de 2005 en el CEFIRE de Elche se han realizando muchas actividades, pero me gustaría destacar algunas:

- Aproximar un número irracional con miles de decimales. (ejercicios 1 y 2. Nivel: 3º de ESO)
- Descomponer un número o un polinomio factorialmente rápidamente para que el alumno se concentre exclusivamente en el algoritmo de MCD y MCM. (ejercicios 6, 7, 21, 52. Nivel: 1º, 2º, 3º, 4º de ESO)
- Hallar todos los divisores de un número y así obtener el MCD como el mayor divisor común. (Ejercicio 7. Nivel 1º ESO)
- Aprender a escribir expresiones en una sola línea, como se hace con las calculadoras. (ejercicios 11, 12. Nivel: 1º, 2º, 3º, 4º de ESO).
- Resolver todo tipo de ecuaciones con una incógnita y ver la interpretación gráfica (Ejercicios 24, 27, 28. Nivel 4º ESO)
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con 2 incógnitas y su interpretación gráfica (Ejercicios 31, 33. Nivel 4º ESO).
- Resolver inecuaciones e interpretación gráfica. (Ejercicios 39. Nivel 4º ESO).
- Problemas de programación lineal (Ejercicios 41, 42. Nivel 2º BAT CCSS)
- Representación de cónicas (Ejercicios 45. Nivel 1º BAT CCNN)
- Explicar gráficamente el significado de la pendiente y ordenada en el origen de las funciones lineales (Ejercicios 63. Nivel 4º ESO)
- Desplazar una curva horizontalmente y verticalmente (Ejercicios 70. Nivel 4º ESO)
- Uso del zoom de la ventana gráfica para estudiar posibles ceros (Ejercicio 72. Nivel 4º ESO) límites y continuidad (Ejercicios 104, 106, 107. Nivel 1º BAT), recta tangente (Ejercicios 111, 114, 115, 116. Nivel 1º BAT)
- Derive nos ayuda a explicar el concepto de derivada (Ejercicio 126. Nivel 1º BAT)
- La rapidez con que halla derivadas sucesivas y resuelve ecuaciones, permiten al alumno concentrarse en las aplicaciones de la derivada para estudiar la monotonía, curvatura, etc. de funciones y después comprobar los resultados haciendo la gráfica. (Ejercicios 124. Nivel 1º BAT).
- Hallar áreas entre curvas. Conocer inmediatamente la curva facilita la comprensión del ejercicio. (Ejercicios 127. Nivel 2º BAT).
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales con 3 incógnitas e interpretación gráfica del problema. (Ejercicios 134. Nivel 2º BAT).
- La rapidez para hallar determinantes y resolver ecuaciones, permite al alumno concentrarse únicamente en utilizar correctamente el Teorema de Rouché-Frobenius cuando tenga que resolver sistemas de ecuaciones lineales con parámetros. (Ejercicios 149, 150, 151. Nivel 2º BAT)
- Operar con matrices. (Ejercicios 137, 138, 139, 140, 141. Nivel 2º BAT).
- Simulación del azar, distribución binomial y normal (Ejercicios 152, 153, 154. Nivel 4º ESO, 1º BAT, 2º BAT).

COLECCIÓN DE EJERCICIOS

DIVISIBILIDAD. NÚMEROS Y OPERACIONES.

1. Encontrar el periodo de fracciones. ejemplos: a) $\frac{3}{23}$ b) $\frac{7}{19}$
2. Comprobar que los números irracionales no tienen periodo: ejemplos: a) π, b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{3}$
3. Observa el resultado de simplificar FLOOR(34,5) y MOD(34,5).
   Define la función $d(a,b) := [FLOOR(a,b), MOD(a,b)]$, y asigna distintos valores a los argumentos a y b.
4. Pasar de decimal a fracción. Observa el comportamiento de esta función:
   dec_fra(ex, an, pe) ≔ (APPEND(ex, an, pe) - APPEND(ex, an))/(10^DIM(an)·(10^DIM(pe) - 1)).
   ¿Encuentras alguna limitación?
5. Ordena de menor a mayor los números. $-3,\ \frac{5}{2},\ \sqrt{5},\ \pi-1,\ -3^2,\ 3^{-2},\ -3^{-2},\ (-3)^2,\ e,\ 2.5$
   Busca ayuda sobre la función interna SORT(v).
6. Descompón factorialmente el número 1470512848896
7. Halla el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de los número 259308 y 7200 de varias formas:
   a) Descomponiendo cada número y utilizando el algoritmo adecuado.
   b) Hallando los divisores de cada uno con la función interna DIVISORS(a)
   c) Utilizando la función interna GCD(a,b,…z)
   d) Creando previamente la función mcd(a,b): = GCD(a,b). Después asigna valores a "a " y "b".
   Guarda un archivo *.mth con esta función. Después abre un archivo nuevo y lee la utilidad *.mth.
   e) Para hallar el mínimo común múltiplo, no hay una función interna. Podemos, por ejemplo, hallar los "p" primeros múltiplos de "a" definiendo $multiplos(a,p) := vector(k*a,k,1,p)$ y hacer algo similar que con DIVISORS(a)
   Curiosidades: Observa la funciones PRIME?(n) NEXT_PRIME(n) PREVIOUS_PRIME(n)
   Observa el resultado de las funciones SELECT(PRIME(k), k, 1, 100), NTH_PRIME(a) o PRIMO(a):=ELEMENT(SELECT(PRIME(k), k, 1, 1000),a) SELECT(PRIME(k), k, [3, 5, 7, 9, 11]) LUGAR_PRIMO(n):=POSITION(n,SELECT(PRIME(k), k, 1, 10000)) nos devolverá false si no es primo o el lugar que ocupa en el conjunto de los primos menores de 1000 (el 1 no forma parte del conjunto).
   Busca en la ayuda el significado.
8. Halla la descomposición factorial de los siguientes números y di cuáles son primos:
   12, 17, 48, 51, 108, 720, 1024 y 1031.
9. Escribe todos los pasos que debes seguir para calcular el MCM y el MCD de varios números.
   Utilízalo para calcular el MCM y MCD de:
   a)32 y 24 b) 720 y 305 c) 96 y 64 d)12, 18 y 24 e) 7, 12 y 28 f) 4, 6 y 24
10. Calcula el resultado de las siguientes operaciones con números enteros:
   a) $-2-3\cdot 5+12:4-3(6-2)$
   b) $(-2)^3-2(5-18:3)(4-2-(-3)^2\cdot 4)$

c) $3 - 2(4 - 3(3 - 6)) + 4^2 : 4$

d) $8 : 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2^5 - 3(5 - 2 + 3 - 2^4 \cdot 3)$

11. Calcula el resultado de las siguientes operaciones con fracciones en forma exacta y aproximada:

a) $\frac{2}{3} - 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} - \frac{1}{6} : \frac{2}{3}$

b) $4 + \frac{10}{6} - 3 \cdot \left(2 + \frac{1}{5} \right)$

c) $\dfrac{-\frac{1}{2} - 3 + 2\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{10} \right)}{3 - \dfrac{4}{5\left(3 - \frac{4}{5} \right)}}$ **(**Calcula poco a poco, como lo harías con papel y lápiz)

Observa como al hacer sucesivas selecciones, el alumno aprende el orden en que tendrá que hacer los cálculos.

12. Escribe como “castillo” de fracciones, las operaciones: (4/5^2/6+3*4-(2/3)*7)/5-4+7/(2-(4/5)^2) sin utilizar el Derive.

13. Efectúa y simplifica las siguientes expresiones radicales:

3√8+5√50-7√72+7√2	5/3√3+2/5√(27/49)	3√(2/5)+7√(18/245)
√5/√2√√√3	3^(1/5)/2^(1/3)	(5^(1/3))^(1/7)

14. Racionaliza:

1/√2	(1+√3)/ √5	(3-√2)/(2√7)	2/(5^(1/3))
3/(1+√2)	5/(2-√3)	(1+√2)/(1-√2)	(3√5+2√3)/(5√2-3√5)

15. Opera con números complejos:

a) $(3 + 2i) + (-1 + 6i)$ b) $(3 + 2i) \cdot (-1 + 6i)$ c) $\dfrac{(3 + 2i)}{-1 + 6i}$

16. Crea una utilidad divisibilidad.mth donde se definan funciones para ordenar números, hallar divisores, múltiplos, mcd2(a,b), mcd3(a,b,c) y después abres la utilidad en un documento nuevo.

ÁLGEBRA

17. Introducir expresiones y textos. Ejemplos

“Estoy aprendiendo a introducir expresiones”

$\dfrac{x + 3^2}{3\pi + e}$, $\dfrac{2^3 x}{x + 3!}$, $tg(3x^3 - 6x + 3)^2$, $sen^2(3x^3 - 6x + 3)$, $6^{\frac{x-y}{2+x}}$, $\ln\left(\sqrt{\dfrac{x + 2}{y - 3}} \right)$

18. Simplificar fracciones algebraicas poco a poco, seleccionando previamente la parte que deseas simplificar. Ejemplo: $\dfrac{\left(2x - x + \dfrac{3}{x}\right)\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^3\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x}\right)} + 5\dfrac{1}{x-1} + x}$

19. Desarrollar o expandir a) $(x+y)^4$ b) $(a^3 - b)^8$ c) $\left(\dfrac{2x-y}{3}\right)^6$ d) $\dfrac{5x-1}{x^4-1}$ e) $\dfrac{4x^3 - x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$

    (al expandir sin cuadrados obtenemos la expresión adecuada para integrar esa función).

20. Asigna $p := x\text{^}3 - 5x + 2$ y $q := -2x\text{^}2 + x$ para después calcular:

    a) $p + q$ b) $p \cdot q$ c) $3p$ d) $p^2 - 2pq - (p-q)^2 - q^2 + p$

21. Factoriza el polinomio $x^8 + 2x^7 - 3x^6 - 10x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 8x$ de distintas formas: trivial, sin cuadrados, etc)

22. Consideremos la siguiente ecuación de segundo grado $x^2 + x - 2 = 0$

    a) Descomponer el polinomio $P(x) = x^2 + x - 2$ en producto de sus factores primos.

    b) Representarlo gráficamente.

    c) Resuelve la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

    d) Contesta a las siguientes preguntas:

    ¿Cuáles son las raíces del polinomio *P(x)*?. ¿En qué puntos corta la gráfica al eje OX?. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$?. ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio, su gráfica y las soluciones de la ecuación?. ¿Cuál?.

23. Busca en la ayuda la función interna quotient(a,b) y remainder(a,b). Define d(a,b):=[quotient(a,b), remainder(a,b)]

    a) Calcula el cociente y el resto de la división $(6x^4 + 5x^2 - 6x + 2) : (3x - 4)$

    b) Dados los polinomios

    $12 \cdot x^5 - 9 \cdot x^4 - 17 \cdot x^3 + 23 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 2$

    $12 \cdot x^5 - 9 \cdot x^4 - 17 \cdot x^3 + 31 \cdot x^2 - 17 \cdot x + 4$

    ¿Cuál es múltiplo de $(3 \cdot x^3 - 5 \cdot x + 2)$?

24. Resolver las ecuaciones: (observa las diferencias al elegir la forma de resolverlas)

    a) $4x^3 - 5x^2 + 8x - 5 = 0$ b) b) $5\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right) = x - 1$ c) $x^3 + 1 = 0$ d) $x^2 + x + 1 = 0$

25. Resuelve las ecuaciones con una incógnita:

    a) $ax^2 + bx + c = 0$ ¿Coincide con la fórmula de las ecuaciones de 2º grado?

    b) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (¡No te asustes!, has encontrado una fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado) Comprueba la fórmula haciendo a:=1, b:=1, c:=1, d:=1.

    c) $ax^4 + bx^2 + c = 0$. ¿Coincide con la fórmula de las bicuadradas?

26. Resolver respecto de la variable x la ecuación $x+y^2-3xy=9$
    Asigna a "y" el valor 2 y vuélvela a resolver. ¿Coincide con la solución anterior?
27. Resuelve las ecuaciones:
    a) $3^x-3=0$ b) $3^x-x=0$ c) $3^x-8x=0$
    Representa la función del primer miembro e incrústala en la hoja de álgebra. Tendrás que resolver las ecuaciones numéricamente en un intervalo (Antes de simplificar, puedes elegir el grado de aproximación). Comprueba las soluciones.
28. Resuelve las ecuaciones logarítmicas:
    a) $\log_3(2x+5)=5$
    b) $3\log(x^2+1)-\log(x-2)=3$
29. Resuelve las ecuaciones paso a paso:
    a) 2x+3=7 b) $3x^2+2=4$ c) $\dfrac{x}{x-2}-x=-\dfrac{3}{x}-1$ d) $(3x-2)^2+2x^2-\dfrac{1}{x}=x+1$
30. Vamos a representar el polinomio $x-3$.
    ¿Cuál es su representación gráfica?. ¿Dónde corta al eje OX?. ¿Y al eje OY?.
    Representa ahora la ecuación de dos variables $x-y=3$.
    ¿Cómo son las dos gráficas? Despeja la variable *y* de la expresión $x-y=3$
31. Resuelve el sistema $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-4y=3 \end{cases}$

    Representa gráficamente las ecuaciones $x+2y=0$ y $x-4y=3$.

    ¿Se cortan las dos rectas?. ¿Qué coordenadas tiene el punto de corte de ambas?.

    ¿Qué significa geométricamente la solución del sistema?.

    Ayuda: Para conocer el punto de corte gráficamente, pulsa "Trazar las gráficas" y te mueves sobre las gráficas con las flechas de desplazamiento.
32. Resuelve el siguiente sistema en las incógnitas *x* e *y*: $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=g \end{array}\right\}$
    Has obtenido una expresión general de la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. ¿Qué ocurre si $ae-bd=0$, es decir $\dfrac{a}{d}=\dfrac{b}{d}$? Interpreta esta situación gráficamente (no olvides que una ecuación con 2 incógnitas es también una recta en el plano).
33. Resuelve ahora el sistema no lineal $\begin{cases} x^2-y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

    Representa gráficamente las dos ecuaciones. ¿En cuántos puntos corta la recta a la parábola?. ¿Cuáles son sus coordenadas?. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema planteado?. ¿Cuáles son?.

34. Encuentra todas las soluciones del sistema no lineal $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$

    ¿Cuántos puntos de corte ves en la representación gráfica?.

    ¿Crees que cortará la recta a la parábola en otro punto?.

En las siguientes actividades, dibuja en tu cuaderno la representación gráfica de cada uno de los sistemas de ecuaciones.

35. Encuentra todas las soluciones del sistema no lineal $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x + y^2 = 2 \end{cases}$

    Explica que significan geométricamente las soluciones del sistema.

36. Encuentra todas las soluciones del sistema no lineal $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y = \sqrt{x} + 2 \end{cases}$

    Explica que significan geométricamente las soluciones del sistema.

37. Encuentra todas las soluciones del sistema no lineal

    Explica que significan geométricamente las soluciones del sistema.

38. Encuentra todas las soluciones del sistema no lineal $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$

    Explica que significan geométricamente las soluciones del sistema.

39. Resuelve las inecuaciones. Representa las soluciones (tendrás que representar la solución en el plano).:

    a) $5x - 2 < 7$ b) $x^2 + x - 2 < 0$ Representa $y = x^2 + x - 2$ ¿Ves alguna relación? c) $\dfrac{3x-5}{x+4} \geq 0$

40. Resuelve la inecuaciones: a) $x + y > 0$ b) $x - y > 0$

    Representa ambas soluciones. ¿Qué puntos del plano verifican las dos inecuaciones?

41. Resuelve el sistema de inecuaciones .

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ x \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

    Observa que cuando las inecuaciones son lineales, la región solución es convexa. ¿Por qué?

¿Qué punto de la región factible maximiza la función $z = 2x + y$?. Representa varias rectas de la forma $2x + y = c$ para distintos valores de c. Puede ser útil utilizar la función:

VECTOR(2x+y=c,c,-6,10).

¿El punto (8,2) pertenece a la región factible?.

Si la función objetivo fuera $z = 2x + ay$, sería mejor representar varias familias (en función de "a" con la barra de desplazamiento de la ventana gráfica) de rectas paralelas.

Ejercicios similares nos permiten explicar de otra forma la programación lineal de 2º BAT CCSS

42. Representar en el espacio z(x,y)=2x+y sujeto a x+2y<=10, x+y>=2, x<=8, x>=0, y>=0 .
    Observa que son las mismas restricciones que el problema anterior. Escribes:
    IF(x+2y<=10 and x+y>=2 and x<=8 and x>=0 and y>=0 , 2x+y)
    La representas en la ventana 3D.
    Representas también x+2y<=10 and x+y>=2 and x<=8 and x>=0 and y>=0 en la ventana 2D
    Con ayuda del cursor sobre la ventana 3D averiguamos los extremos de z(x,y) sujeta a las restricciones lineales.
43. ¿Qué punto (x,y) minimiza función $z = x^2 + y^2$?. Representa esta función en el espacio.
44. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

    a) $\begin{cases} x + y < 1 \\ x^2 + y > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y < 1 \\ x^2 - y > 0 \end{cases}$ ¿Son regiones convexas?

CÓNICAS

45. Define la función d(p,q):=|p-q|, (cuando p y q son puntos se escriben sus coordenadas entre corchetes).
    Simplifica e interpreta d(4,7) d(7,4) d([4,1],[3,2]) d([4,1,2],[3,2,5])
    Introduce, simplifica y representa los lugares geométricos:
    a) Circunferencia $D([x, y],[2,1]) = 2$ b) Elipse $D([x, y],[-3,0]) + D([x, y],[3,0]) = 8$
    c) Hipérbola $D([x, y],[-3,0]) - D([x, y],[3,0]) = 2$ Observa que sólo dibuja una rama. Para obtener las dos $|D([x, y],[-3,0]) - D([x, y],[3,0])| = 2$
    d) Parábola $D([x, y],[3,0]) = DPR(x, y,1,0,3)$ siendo DPR(px, py, a, b, c):=(apx+bpy+c)/√(a^2+b^2)

SUCESIONES Y FUNCIONES

46. a) Definir la variable "b" con el valor "34"

    b) Evaluar la expresión b+5

47. Definir una función con el nombre $mia(x, y) = x^2 - 3xy$ y evaluarla en $x = 2$, $y = 4$.

48. Editar la expresión $\dfrac{\sqrt{x-y^2+2z}}{z+2(x+y)}$ y sustituir en ella la variable "x" por el valor "58" y la variable "y" por el valor "89", y obtener la expresión simplificada.

49. Busca en la ayuda, para que sirven las siguientes funciones predefinidas (funciones que no necesitan un fichero de utilidades para ser cargadas en memoria):
    SQRT(x), ABS(x), FLOOR(), MOD(h,m), EXP(x), LN(x), SIN(x), COS(x), TAN(x), GCD(a,b,…z), LCM(a,b,..,z), POLY_GCD(a,b,…z), ABS(z), PHASE(z), RE(z), IM(z)

50. Dado el número complejo $z = 1 + i$, halla el módulo, argumento (en grados), parte real y compleja utilizando las funciones anteriores.

51. Define la función
    $$\mathrm{RAIZG}(r,\ g,\ n) := \mathrm{VECTOR}\left(\left[r^{1/n},\ \frac{g + 360\cdot k}{n}\right],\ k,\ 0,\ n-1\right)$$
    Te permitirá hallar las n raíces del número complejo de módulo r y argumento g. Representa los puntos obtenidos (ventana gráfica: seleccionar/sistema de coordenadas/coordenadas polares y ventana álgebra: opciones/ajustes de modo/simplificación/ángulos/grados)
    Define funciones que pasen los números complejos de la forma binómica a polar y viceversa.

52. Halla el mcd de los polinomios: $6x$, $9x^2$, $12x^3$, utilizando una función predefinida.

53. Representa la gráfica de la función $y = 2x + 3$. ¿Qué tipo de gráfica se obtiene?. Intenta averiguar en qué puntos corta a los ejes de abscisas y de ordenadas moviéndote con el cursor. Nota: Observa la pantalla de dibujo 2D, no tiene una escala 1,1 real.

54. Introduce la expresión **y=3x+2**. "Resuélvela en *x*" . Intercambia *x* e *y* en la expresión obtenida. Representa la función inicial y su inversa. Observa su simetría.

55. Repite la práctica anterior con las funciones siguientes:

y=x^2	**y=x^2-x+6**	**y=2^x**
y=LN(x)	**y=SIN(x)**	**y=COS(x)**

56. Define la funciones **F(x):=3x+2** y **G(x):=x-5**. A continuación "Introduce" y "Simplifica" **F(G(x))** y **G(F(x))**. Has realizado una composición de funciones. Representa las cuatro funciones obtenidas y trata de comprender su relación.
    Repite la práctica con otras funciones como F(x):=x^2-x y G(x):=1/x.

57. Considera dos funciones inversas como las obtenidas en los ejercicios anteriores. Comprueba que su composición es la función identidad $y = x$.

58. Borra las gráficas anteriores y representa ahora las funciones $y = 2x + 7$, $y = 2x - \frac{1}{2}$ e $y = 2x - 3$.
    ¿Qué ocurre con ellas?. ¿Por qué crees que ocurre esto?. ¿Tienen algo en común todas estas expresiones?.

Haz una conjetura y comprueba si es o no cierta, para ello borra todas las gráficas anteriores e inventa unas nuevas con las que pongas a prueba tu conjetura.

59. Borra de nuevo la ventana gráfica y representa las gráficas de las funciones $y = -2x + 6$, $y = -3x + 5$, $y = -8x$ e $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

    ¿Qué ocurre con la orientación de todas ellas?. ¿A qué crees que puede deberse?.
    Realiza una conjetura y comprueba tu hipótesis de la forma que se ha indicado en el ejercicio anterior. Una vez comprobada, haz otra para que la orientación sea la contraria y compruébala. ¿Cuál es el valor que te da la orientación de la recta?.

60. ¿Qué tiene de especial la función $y = 3$?. ¿Cómo influirá esto en su orientación?. Comprueba tu suposición.¿Cómo podría ser la expresión que proporcione una recta vertical?.

61. Ahora vas a representar parejas de funciones. Representa las gráficas de $y = 4x - 7$ e $y = -\frac{1}{4}x + 1$. ¿Qué ocurre con ellas?. ¿Qué ángulo forman entre sí?.

62. Dada la función $y = 3x - 2$, inventa otra cuya gráfica sea perpendicular a ella. Ponte varios ejemplos hasta que descubras cuál es la relación entre las gráficas de rectas perpendiculares. Lanza tu conjetura y verifícala.

63. Dibuja la gráfica de $y = 2x$, $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 2$.

    ¿Cómo influye en la gráfica sumar un número a la expresión $2x$?. Es muy útil utilizar la barra de desplazamiento de la ventana de gráficas. Representa y=2x+n.
    Representa y=mx+n y utiliza las barras de desplazamiento para explicar el significado de m y n.

64. Dibuja ahora las gráficas $y = 2x$, $y = 2(x + 3)$ e $y = 2(x - 2)$

    ¿Qué relación tienen las dos últimas con la gráfica de $y = 2x$?. utilizar la barra de desplazamiento de la ventana de gráficas. Representa y=2(x+k)

65. Dibuja una recta igual a la de $y = 3x$ desplazada dos unidades hacia arriba. Dibuja una recta igual a la de $y = 4x$ desplazada cinco unidades a la derecha.

66. Dibuja una recta igual a la de $y = 2x$ desplazada dos unidades hacia abajo y una hacia la izquierda. Es posible que la idea no se aprecie con corrección debido precisamente a la forma de la gráfica (una recta). En las actividades siguientes (ya con una parábola debe quedar claro).

67. Dibuja la gráfica de $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 1$.

    ¿Cómo influye en la gráfica sumar un número a la expresión x^2?.

68. Dibuja ahora las gráficas $y = x^2$, $y = (x+2)^2$ e $y = (x-1)^2$

    ¿Qué relación tienen las dos últimas con la gráfica de $y = x^2$?.

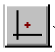
69. Dibuja una recta igual a la de $y = 3x^2$ desplazada una unidad hacia arriba. Dibuja una recta igual a la de $y = 2x^2$ desplazada tres unidades a la derecha.

70. Dibuja una parábola igual a la de $y = x^2$ desplazada dos unidades hacia abajo y tres hacia la izquierda.

71. Representa gráficamente la función polinómica $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$.

    Los puntos de corte de esa gráfica con el eje de abcisas son -1 y 1. ¿Cuál de los dos crees que corresponde a un cero (raíz) múltiple?. Escribe tus conclusiones.

    Comprueba tu conjetura con el comando **Factorizar**.

72. Considera la función $f(x) = x^2 - \frac{21}{20}x + \frac{11}{40}$. Al representar gráficamente observarás que parecen existir una infinidad de ceros, lo que sabemos que no es posible debido al Teorema Fundamental del Álgebra. Ve ajustando la escala (Zoom) hasta que observes dos puntos limpios de corte 0.5 y 0.55. (Si la gráfica desaparece de la pantalla, debes mover el cursor al punto del plano (0.5,0) con el ratón y después centrar la gráfica con el botón ). Escribe los puntos de corte con el eje OX.

    Ejecuta el comando **Factorizar** para comprobar los resultados.

73. Busquemos los ceros (puntos de corte con los ejes) de la función $f(x) = x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$. Ajusta la escala de ordenadas para apreciar la gráfica completa del polinomio y conjetura posibles ceros. ¿Alguno de ellos es múltiple?. Escribe tus conclusiones.

    Comprueba tu conjetura con el comando **Factorizar**.

74. Para una función como $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$, teclea **abs(x^2-4)** y represéntala.

    ¿Porqué la gráfica de la función siempre está por encima del eje OX. Escribe tus conclusiones.

75. Esa misma función también puede aparecer expresada como una llave

76. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } |x| \geq 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } |x| < 2 \end{cases}$

En éste caso teclea **if(-2<x<2,4-x^2,x^2-4)** y comprueba que son la misma gráfica.

77. Representa ahora la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 2 - 2x^2 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

78. Representa:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} \ si \ x < 0 \\ 2x - 1 \ si \ 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 3x - 1 \ si \ x > 2 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de la función.

79. Conjetura cuál será el comportamiento de la gráfica de una función, por ejemplo el seno (sinx para DERIVE), si alteramos las variables dependiente e independiente de la forma

sen(x), sen(x)+3, sen(x+3), sen(x/3), 3sen(x), sen(3x)

y comprueba tus conjeturas procediendo a la representación gráfica superpuesta de todas estas funciones. Escribe tus conclusiones.

Representa $y = a + bsen(cx)$ y añade barras de desplazamiento para a, b y c.

80. Representar varias funciones al mismo tiempo: (si pulsas Opciones/identificar nuevas gráficas, podrás distinguirlas).

a) Escribe y representa [1, x^(1/4), √x, x^(3/4), x, x^(5/4), x^(3/2), x^(7/4), x^2]

b) Escribe simplifica y representa VECTOR(SIN(m·x), m, 1, 5, 1)

c) Escribe y = a·x^2 + b·x + c. en la ventana de gráfica abre una barra de desplazamiento para cada parámetro y representa distintas parábolas

81. Representa gráficamente la función racional $f(x) = \dfrac{2x}{3x+1}$

Compara la gráfica de f(x) con la de $|f(x)|$ y la de $f(|x|)$. Escribe tus conclusiones.

82. Halla los 300 primeros términos de la sucesión $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$. Represéntalos. ¿A qué número crees que tiende?.

Ayuda: Introduces $\dfrac{2n-1}{n+1}$, y pulsas Cálculo/vector. Para representar haces lo mismo pero con el vector $\left[n, \dfrac{2n-1}{n+1}\right]$. Pon en modo de trazado para ver el límite.

83. Define la sucesión FIB(n):=IF(n<2,n,FIB(n-1)+FIB(n-2)). Halla los 20 primeros términos. ¿Ves la relación?. Es una sucesión definida por recurrencia. Se llama sucesión de Fibonacci.
También se podía definir FIB(n):=FIBON(n)sub1 siendo
FIBON(n):=ITERATE([k,j+k],[j,k],[0,1],n)

84. Tenemos la sucesión $a(n) = \dfrac{3n+5}{1-4n}$.

Calcula los 4 primeros términos de la sucesión y represéntalos gráficamente.

Calcula los términos a(2000) y a(3000). (Si quieres saber cuanto valen las fracciones que aparecen, en lugar del botón = utiliza ≈)

Conjetura el valor de su límite, si existe.

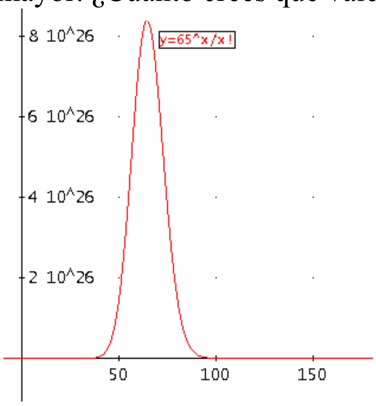
Compruébalo calculando el límite.

85. Representa gráficamente la sucesión $a(n) = \sqrt[n]{9}$ y conjetura cuál es su límite.

86. ¿Cuál será el límite de la sucesión $a(n) = \sqrt[n]{n}$?. Compruébalo gráfica y analíticamente.

87. $a(n) = \operatorname{sen}(n)$ .Representa gráficamente la sucesión. Comienza, por ejemplo con N=100. ¿Crees que será convergente?. Reduce la escala de abcisas (Zoom de alejamiento). ¿Qué puedes conjeturar sobre la convergencia de la sucesión?.

88. Sea la sucesión $a(n) = \dfrac{a^n}{n!}$, con $a > 0$. Conjetura cuál puede ser su límite para distintos valores de *a*.
Si no ves la gráfica ve haciendo Zoom hasta que lo consigas. Si necesitas más puntos coge un N mayor. ¿Cuánto crees que vale el límite de todas estas sucesiones?. Para $a = 65$ es



¿Y el caso particular de la sucesión $a(n) = \dfrac{n^n}{n!}$, es convergente?.

La fórmula de Stirling es $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Según eso $\lim \frac{a^n}{n!} = \lim \frac{a^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{a\cdot e}{n}\right)^n$

Aplicando el límite de un producto $= 0\cdot 0^{+\infty} = 0\cdot 0 = 0$

El otro $\lim \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim \frac{e^n\cdot n^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n} = \lim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} = +\infty$ por ser el numerador un infinito de mayor orden que el denominador.

89. Considera la sucesión $a(n) = (-1)^n \frac{2n}{n+1}\operatorname{sen}(n)$. Convéncete de que está acotada por el 2. Realizando un cambio adecuado de escala en el eje de abcisas (OX), ¿Crees que es convergente la sucesión?.

90. Describe un método para determinar gráficamente si una sucesión es convergente o no, explicando qué forma tiene cuando es convergente y que formas puede tener cuando no lo es.

91. Representa las sucesiones $a(n) = Ln(n)$ y $b(n) = \sqrt{n}$. ¿Cuál de las dos diverge más rápidamente?.

92. Determinar por el método gráfico la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones e indica el valor del límite en caso de ser convergente.

a) $a(n) = \sqrt{n^2 - n}$ b) $b(n) = \sqrt{n} - \sqrt{n-2}$ c) $c(n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

d) $d(n) = \left(\frac{3n+1}{2n}\right)^n$ e) $e(n) = \left(1 + \frac{n+2}{n}\right)^{2n}$ f) $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$

¿como son los límites de las sucesiones de los apartados c) y f)?. Calcúlalos analíticamente para comprobarlos.

93. ¿Cuánto crees que valen los siguientes límites?

$\lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{3n+1}{2n-3}\right)}$ y $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{3n+1}{2n-3}\right)}$

Realiza gráficamente con DERIVE tu conjetura. Compruébalo calculando el límite.

94. Representa gráficamente la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. Realiza Zoom de alejamiento repetidas veces.

¿Qué forma adquiere la curva realizando este Zoom?. ¿Tendrá límite en el infinito?.

Vuelve a la escala 1:1. Realiza ahora un Zoom de alejamiento pero sólo en el eje OX (o lo que es lo mismo, comprimir la curva). ¿Qué le sucede a la curva? ¿Sigues creyendo que tendrá límite? ¿Porqué?. ¿Está acotada esta función?.

95. Representa la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$.

Calcula el valor de la función en $x=200$ y $x=500$

Realiza ahora las deformaciones que creas necesarias y contesta.

¿Tiene límite cuando $x\to\infty$?. ¿Y cuando $x\to-\infty$? ¿Cuáles son esos límites?.

96. Representa la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{5x+6}$. Realiza las deformaciones que creas necesarias.

¿Tiene límite cuando $x\to\infty$?. ¿Y cuando $x\to-\infty$? ¿Cuáles son esos límites?.

97. Describe un método para determinar la existencia o no de límite y que forma adquiere la curva en cada uno de los tres casos anteriores.

98. Utilizar la representación gráfica para determinar la existencia y el valor de los límites en el infinito de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ b) $f(x)=\operatorname{tg}x$ c) $g(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

d) $h(x)=\dfrac{Lnx}{x}$ e) $f(x)=\dfrac{5x^2+1}{x}$ f) $g(x)=\dfrac{20x-1}{x^2-1}$

h) $h(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+4}}$ i) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ j) $g(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$ k) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$

99. Consideremos ahora la función $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.

¿Tiene límite en $x=+\infty$?. ¿Cuánto vale?. ¿Y en $x=-\infty$, cuál es su valor?

¿Cuál es el límite en $x=3$?. ¿Y en $x=0$?. ¿Por qué?.

100. Representa gráficamente la función a trozos $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & x<-1\\ x^3+2 & x\geq -1\end{cases}$.

¿Crees que tiene límite en el punto $x=-1$?. Compruébalo gráfica y analíticamente (calculando los dos límites laterales).

101. Representa gráficamente la función a trozos $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & x<1\\ 2x^3+1 & x\geq 1\end{cases}$.

¿Tiene límite en el punto $x=1$?. ¿Por qué?.

Habrás observado que la función da un salto, ¿cuánto vale ese salto?.

102. Representa gráficamente la función a trozos $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & x < 0 \\ Lnx & x > 0 \end{cases}$.

¿Tiene límite en el punto $x = 0$?. ¿Por qué?.

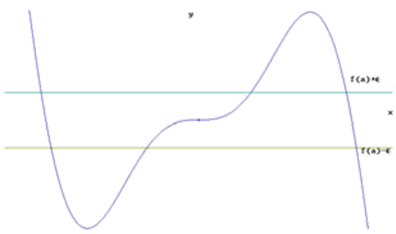
Habrás observado que la función da un salto, ¿cuánto vale ese salto?.

103. Representa gráficamente la función a trozos $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \le 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$.

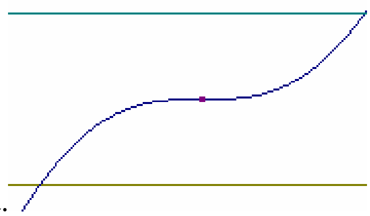
¿Tiene límite en el punto $x = 0$?. ¿Por qué?. Comprueba tu conjetura calculando los límites laterales. Escribe tus conclusiones.

Como habrás podido comprobar con el método utilizado hasta ahora no podemos determinar siempre la existencia del límite de forma gráfica (nos ha fallado en el caso de una función oscilante alrededor del punto). Para subsanarlo estudiaremos una propiedad más restrictiva que el límite, la continuidad local; pues esta lleva implícita la existencia del límite. Para algunos autores son lo mismo; pensar que el caso de discontinuidad evitable es bastante ficticio.

Para determinar la continuidad en un punto utilizaremos la idea de control. Observa la siguiente gráfica, ¿existe trozo de curva controlado entre las dos rectas alrededor del punto señalado?.



La respuesta es si, y el trozo controlado entre las dos rectas es el que aparece en la siguiente figura.



Las rectas horizontales representan el ε elegido, el trozo controlado es el intervalo que define el δ necesario para esas rectas.

104. Intenta obtener la primera figura dibujando las gráficas:

La curva es la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, las dos rectas son $y = -1$ e $y = 1$ y el punto se introduce entre corchetes; en éste caso, [0,0] y lo dibujamos. (Si te molestan los ejes puedes quitarlos con el menu Opciones /Ejes

Observa que si cogemos un ε más pequeño (un par de rectas que estén más cerca del punto), el δ varía (el trozo de curva controlado es diferente). Como ejemplo, encuentra el trozo de curva controlado para el par de rectas $y = -0.5$ e $y = 0.5$.

¿Podríamos determinar el trozo de curva controlado para las rectas $y = -0.05$ e $y = 0.05$?. ¿Cómo lo harías?. ¿Qué método propones?.

105. Aplica el método que acabas de encontrar para determinar el trozo de curva controlado entre las rectas $y = -1$ e $y = 1$ y la curva $f(x) = 2\operatorname{sen}(70x)$ alrededor del punto $x = 0$.

¿Puedes encontrar con exactitud el trozo controlado?.

Habrás observado que no; al realizar un Zoom de acercamiento en los dos ejes, llega un momento en que las dos rectas horizontales desaparecen (en el ejemplo anterior no sucedía, pues estaban muy cercanas al 0), por tanto éste método no sirve para cualquier ε elegido. Luego para no "perder de vista" las rectas debemos mantener fijo el eje OY y acercar el eje OX; es decir, realizamos un Zoom de acercamiento sólo para el eje OX, que llamaremos "estirar la curva". Pruébalo y verás como podemos encontrar sin problemas ese trozo de curva controlado.

Diremos que ***la curva es controlable*** si encontramos el trozo de curva encerrado entre las dos rectas. (Omitimos deliberadamente la palabra continua para no evocar imágenes incorrectas; pero, por lo dicho hasta ahora, sabemos que controlable=continua).

106. Aplica el Zoom en ambos ejes y el estiramiento para ver si es controlable la curva

$f(x) = \frac{2x}{|x|}\operatorname{sen}\left(150\left(e^{-(3x)^2} - 1\right)\right)$ en el punto $x = 0$, para las rectas $y = -1$ e $y = 1$

107. Aplica el estiramiento para ver si es controlable la curva $f(x) = 2\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ en el punto $x = 0$, para las rectas $y = -1$ e $y = 1$.

Al realizar sucesivos estiramientos, ¿que forma adquiere la curva que es controlable?. ¿Y la que no lo es?.

Describe un método para determinar si una curva es controlable o no en un punto.

108. Aplica el método para ver si son controlables las curvas:

$f(x) = x\left(\operatorname{sen}\frac{10}{x}\right)^2$ en el punto $x = 0$.

$f(x) = x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ en el punto $x = 1$.

$f(x) = 0.1x^3 - 0.2x^2 + 1$ en el punto $x = 2$.

$f(x) = \frac{x-1}{|Lnx - 1|}$ en el punto $x = 0$.

$f(x) = x^3 + x^2\cos\left(\frac{50}{x}\right) + 1$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} x & x < 1 \\ 0.92x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.

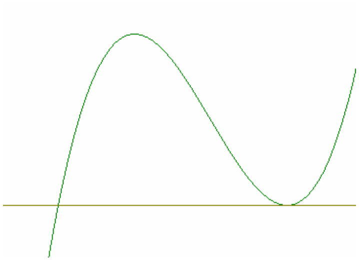
$f(x) = |x|$ en el punto $x = 0$.

$f(x) = \frac{2x}{|x|}\operatorname{sen}\left(150\left(e^{-(3x)^2} - 1 + x\right)\right)$ en el punto $x = 0$.

$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{4}{x+1} + x\right)$ en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

CURVAS Y TANGENTES. DERIVABILIDAD LOCAL

109. ¿Crees que la recta es tangente a la curva?. ¿Por qué?.



a) No, porque la recta corta a la curva b) No se puede saber

d) No, porque la recta tiene dos puntos comunes con la curva

e) En una parte seguro que no. En la otra, puede que sea tangente.

110. Dibuja la curva $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 1$ y la recta $y = 1$. Si nos centramos en un intervalo alrededor del punto $x = 0$, observarás que la recta corta a la curva en un solo punto (compruebalo igualando ambas expresiones y resolviendo la ecuación con el menu Resolver) ¿Crees que la recta es tangente a la curva en ese punto?. Explica tu respuesta.
(Te puede resultar útil acercarte más a la gráfica en los alrededores del punto).

111. Representa la curva $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ y la recta $y = 0.49$. ¿Crees que en el punto $x = 1$ la recta es tangente a la curva?. Realiza todos los Zoom que creas necesarios y elige la respuesta más adecuada.

a) No podemos estar seguros b) No, parece que toca a muchos puntos
c) Sí, es tangente d) No, la recta es secante
e) Ninguna de las anteriores

En realidad, ¿corta la recta a la curva?.

112. Representa la curva $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ y las rectas 1) $y = 0.1x + 0.4$, 2) $y = \frac{1}{2}$, 3) $y = \frac{2x+3}{10}$.

¿Cuál de las tres rectas crees que es tangente a la curva en el punto $x = 1$?.

113. ¿Crees que una recta que corta a la curva en un punto puede ser tangente a la curva en ese mismo punto?.

a) No, porque si una recta toca a la curva no la corta b) Sí
c) No, porque una recta no puede ser secante y tangente a la vez
e) Sí, porque todas las rectas tangentes también son secantes

Independientemente de tu respuesta, recuerda la recta $y = 1$ del ejemplo 28, que sólo cortaba a la curva $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 1$ en un solo punto. Representalas de nuevo y aplícales un Zoom para ver que forma tienen.

114. ¿Serías capaz de predecir como será la tangente a la curva $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$ en el punto $(0,0)$?.

Describe un método para poder trazar la tangente a una curva en un punto.

115. Aplica el método anterior (que llamaremos método del ZOOM) a la curva $f(x) = x\,\text{sen}(100x)$ en el punto $(0,0)$. ¿Se puede trazar la tangente a la curva en ese punto?. ¿Porqué?.

116. Aplica el método anterior a la curva $f(x) = |x|$ en el punto pico que aparece en su gráfica. ¿Se puede trazar la tangente a la curva en ese punto?. ¿Porqué?.

117. Aplica el método anterior a la curva $f(x) = x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ en el punto $(0,0)$.

¿Se puede trazar la tangente a la curva en ese punto?. ¿Porqué?.

118. Aplica el método anterior a la curva $f(x) = \frac{x\,\text{sen}(x)}{|x|}$ en el punto $(0,0)$.

¿Se puede trazar la tangente a la curva en ese punto?. ¿Porqué?.

119. ¿Se puede trazar la tangente a la curva $f(x) = (x+1)\,\text{sen}\left(150\left(e^{-x^2} - 1\right)\right)$ en $(1,0)$.

CÁLCULO DE DERIVADAS E INTEGRALES

Como habrás observados en los ejemplos anteriores, las curvas en las que podemos trazar la tangente por un punto determinado al magnificarlas se confunden con una recta.

120. Calcula las derivadas, caso de existir, en los puntos indicados de cada una de las curvas anteriores.
¿Existe alguna relación entre la diferenciabilidad en un punto y la apariencia de la curva al aplicarle Zoom?.

121. Deriva $f(x) = 3x^2 + 7x - 4$ mostrando los pasos.

122. Deriva la función $f(x) = \frac{sen^2(ax)}{x}$ respecto “x” mostrando los pasos. Cuidado al escribir con DERIVE la función $y = sen^2(ax)$ ya que parece que escribas $y = sen(ax)^2$

123. Representa gráficamente la función $f(x) = x^4 - x^3$. (Observarás que en $x = 0$ tiene una raíz múltiple ¿Será un punto de inflexión?).
Algebraicamente, para calcular los candidatos a puntos de inflexión debemos resolver la ecuación $f''(x) = 0$. Para ver si efectivamente los son, debemos comprobar si hay cambio de signo en la segunda derivada.

Gráficamente, el problema es mucho más sencillo, calculamos $f''(x)$ y la representamos también.

¿Dónde están los candidatos a puntos de inflexión?.

Serán los puntos de corte de la gráfica de $f''(x)$ con el eje OX.

¿Cómo sabemos si lo son ciertamente de modo gráfico?.

124. Representa la función $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$.

¿Tiene algún cero múltiple?. Factorízalo.

¿Son los dos ceros múltiples puntos de inflexión?. ¿Cuáles son sus puntos de inflexión?.

(Recuerda, para que sea punto de inflexión, la derivada segunda debe cambiar de signo; o dicho gráficamente, la gráfica de la segunda derivada debe "atravesar" al eje OX).

Estudia la monotonía y extremos, hallando la derivada.

125. La función $f(x) = (x-1)^3(x+1)^4$ tiene dos ceros múltiples. Determina cuál de ellos es punto de inflexión.

¿Podrías decir todos los puntos de inflexión de esta curva?.

126. ¿Nos puede ayudar derive a explicar el concepto de derivada? Varias formas:
a) Ejecutar el vector
VECTOR((f(a + h) - f(a))/h, h, 1, 0, -0.01) donde previamente definimos f(x) y asignamos un valor para "a".
b) Representar, junto a y=f(x), las rectas secantes que pasan por (a,f(a)) , ((a+h,f(a+h)) e insertamos en la ventana gráfica una barra de desplazamiento para "a" y otra para "h".
c) Representar y=f(x) y su derivada. También las rectas tangentes en un punto "a" modificable con la barra de desplazamiento. Intentamos ver la relación entre las tres curvas.

Un ejemplo típico en integración

127. *"Calcular el área encerrada entre la curva* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ *y el eje OX".*

El estudiante debe recordar que el área encerrada entre una curva y el eje OX es la siguiente integral definida $A = \int_a^b |f(x)| dx$, siendo a y b los puntos de corte de la curva con el eje X de menor y mayor abcisa respectivamente.

Como la curva es un polinomio de tercer grado, es lógico pensar que cortará tres veces al eje, luego pasaremos a representar la curva para poder identificar los límites de integración. Si el estudiante domina la representación gráfica de funciones, calculará los puntos de corte, dará un valor en uno de los intervalos que aparecen y como consecuencia del teorema de Darboux dará la siguiente gráfica:

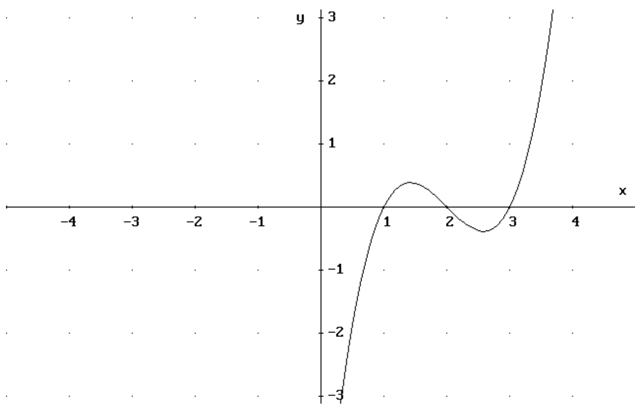


Fig. 1

Un estudiante que no domine la representación gráfica de funciones basándonos en la expresión de la función (sin necesidad de estudiar todo su comportamiento), planteará directamente como solución $A = \int_1^3 \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)dx$, en el supuesto de que encontrase los puntos de corte con los ejes[1]. Al resolver ésta obtendrá como resultado:

$$A = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right]_1^3 = \left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18\right) - \left(\frac{1}{4} - 2 + \frac{11}{2} - 6\right) \quad (1)$$

$$A = -\frac{9}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) = 0\,.$$

(Se han explicitado todas las operaciones, al igual que más adelante, para notar que éstas aportan muy poco al estudiante y sin embargo son el foco de atención en la revisión de su estrategia).

Hay estudiantes que con ésta solución se dan por satisfechos sin pararse a pensar que lo que se les pedía era un área, con lo que éste resultado es, cuanto menos, extraño. Otros en cambio pensarán que "no puede ser", y empezarán a revisar las operaciones algebraicas realizadas en (1) con la creencia de

[1] La presentada aquí no es la única opción, pero sí la que más posibilidades presenta. El problema se planteó en una clase de COU de MatemáticasII, el estudiante que encuentra como puntos de corte el 1 y 2 calculará la integral con ésos límites y obtiene ¼ como solución. El que encuentra los puntos 2 y 3 obtiene -1/4, lo que debería llevarle a pensar que el área no puede ser negativa (cerca de lo que se pretende en el problema), pero entonces recuerda el "modulo" y da como solución 1/4.

que se han equivocado y les costará admitir que las operaciones las han realizado bien (pues no tiene seguridad en sus cálculos). El paso decisivo será darse cuenta de la necesidad de dibujar la gráfica de la función para ver que sucede. Si el estudiante no sabe dibujarla o lo hace mal, no encontrará la solución correcta al problema. El asistente puede dibujarnos la curva y nosotros decidir entonces cómo actuar para calcular el área; es decir, *el asistente nos puede ayudar a comprender el problema o al menos una parte de él*.

Viendo la gráfica es fácil llegar a la conclusión de que para poder calcular el área necesitamos plantear dos integrales definidas. Es frecuente afirmar entonces (despreciando el módulo que aparece en la expresión del área):

$$A = \int_1^2 \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)dx + \int_2^3 \left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)dx .$$

Resolviendo la integral tendremos:

$$A = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right]_1^2 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x\right]_2^3$$

y aplicando la regla de Barrow:

$$A = \left[\left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18\right) - \left(4 - 16 + 22 - 12\right)\right] + \left[\left(4 - 16 + 22 - 12\right) - \left(\frac{1}{4} - 2 + \frac{11}{2} - 6\right)\right]$$

$$A = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \quad (2)$$

De nuevo volverá a revisar sus cálculos, pues confía poco en ellos. Si resolviese las dos integrales definidas con la ayuda del asistente, que supone no comete error, se centraría de inmediato en revisar donde está mal su planteamiento (obviar el módulo de la función) lo que deducirá con mayor o menor dificultad de la expresión (2) y de la gráfica de la función.

128. Calcula la integral $\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$.

129. Calcula el área encerrada entre las curvas $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Recuerda que si $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, siendo *a* y *b* los puntos de corte, entonces

$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

130. Calcula la integral $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$.

¿Qué sucede en esta integral?. ¿Tiene primitiva la función $\frac{1}{(x-2)^2}$?

¿Es continua $\frac{1}{(x-2)^2}$ en el punto $x = 2$?

Calcula con DERIVE $\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ e intenta explicar qué es lo que ocurre. La gráfica te puede ayudar.

Calcula la integral $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$. Haz la gráfica $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$. Compara esta gráfiva con la anterior.

¿Por qué crees que en este caso la función es integrable?.

131. Obtener $\int_{-1}^1 \text{sen}(\pi x^2)$.

Habrás observado que DERIVE “no sabe” calcularla (Es una función de Fresnel, cuya primitiva no puede expresarse por medio de funciones elementales). Sin embargo si podemos calcular su valor aproximado (1.0097) mediante la opción de aproximar. Representa la función.

132. Representa la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (función de densidad de la distribución normal estándar)

a) Comprueba que es una función de densidad. (área =1)

b) Define la función de distribución $\phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Calcula $\phi(0)$, $\phi(0.5)$. Comprueba los resultados con la tabla del libro de texto.

c) Representa $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$ (función de densidad de la normal de media “m” y desviación típica “s”. Utiliza las barra de desplazamiento.

MATRICES Y SISTEMAS LINEALES.

Para la resolución de sistemas lineales podemos seguir utilizando el menú Resolver/ sistema de ecuaciones.

133. Resuelve el sistema lineal $\begin{cases} x-y+2z=18 \\ 2x+4y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ y el sistema $\begin{cases} x-y+2z=18 \\ 2x+4y-z=0 \\ 3x+3y+z=18 \end{cases}$ con SOLVE y con ROW_REDUCE

134. Resuelve el sistema indeterminado $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y-z=3 \end{cases}$ respecto de (x,y) y después respecto (y,z)

Halla 20 soluciones particulares. Deberás escribir algo similar a

$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[x = \frac{4}{3} \wedge y = t \wedge z = -\frac{3\cdot t+5}{3}\right],\ t,\ 1,\ 20,\ 1\right)$$

Representa los puntos en el espacio.

$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[\frac{4}{3},\ t,\ -\frac{3\cdot t+5}{3}\right],\ t,\ 1,\ 20,\ 1\right)$$ ¿Qué observas?

Representa las dos ecuaciones (los dos planos) en el espacio. ¿Qué observas?

135. Consideremos tres ecuaciones *r*, *s* y *t*. Introduce y a continuación simplifica las siguientes expresiones:

r:= [2x+3y-z=1] s:= [x-2y+5z=2] t:= [x+2y+z=1]

Resuelve los sistemas [r, s, t], [2r, 3s, 4t], [r+s, r-s, r+s+t], [2r+s, 3r-s, r+s+t, 2r-s, s+t], [r, 2s-r, 2t-r], [r, 2s-r, 2s-r+2t-r].

Comprueba que se trata de sistemas equivalentes. Observa que los dos últimos están relacionados con el método de Gauss para escalonar el sistema.

136. Dadas dos matrices $a=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Qué igualdades son ciertas?

a`` = *a* (*a* + *b*) (*a* − *b*) = $a^2 - b^2$ (*a* + *b*)` = *a*` + *b*` $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(*a*−1)` = (*a*`)−1 (*a* · *b*)` = *b*` · *a*` $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ $(a+b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$

a+b=b+a a*b=b*a

(ayuda: Introducir/dominio de variable/vector cuando tratamos matrices genéricas)

137. Simplifica $((ab)')^{-1}(b^{-1}a'b)'$ (utiliza simplificar/factorizar)

138. Comprueba que $m^2 = 2m - i$ siendo $m := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $i := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

139. Halla las matrices $m := \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que su inversa sea $2i - m$, donde i es la matriz unidad.

(IDENTITY_MATRIX(2)) (Plantear la ecuación y resolver/expresión…)

140. Resuelve la ecuación $2X + A^t B = C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Ayuda: Introduce/dominio de variable/ la X debe ser vector.

141. Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r} 2X + Y = A \\ -X - Y = B \end{array}\right\}$ siendo A y B las matrices del ejercicio anterior.

Ayuda: Tendrás que utilizar ROW_REDUCE.

142. DERIVE incluye algunos archivos de utilidades. En el archivo VECTOR.MTH se incluye la siguiente herramienta que convierte en 0 los elementos de la matriz *A* situados bajo el elemento *aij*:
PIVOT(a, i, j):=VECTOR(IF(m≤i, a↓m, a↓m - a↓m↓j / a↓i↓j * a↓i), m,DIMENSION(a)).
Para comprobar su funcionamiento consideremos a:= [[1, 5, -3, 7], [2, -1, 1, 11],[4, 3, -4, 3]].
Basta que resaltes la expresión correspondiente y pulses **Simplificar**.
A continuación introduce y simplifica sucesivamente las siguientes expresiones:
b:= PIVOT(a, 1, 1) c:= PIVOT(b, 2, 2)
NOTA: En Derive 6.1 la función PIVOT es interna.

143. Aplica el método de Gauss al siguiente sistema, cuya matriz ampliada es:

a:= [[2, 1, -3 ,1, -5, 1, 1], [1, -1, 2, -3, 1, -5, 4], [3, 4, -1, 1, -7, 1, 8],[2, 3, 1, -1, 1, -1, 5], [5, -2, 3, -7, 5, 4, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 9]] , utilizando la función PIVOT definida anteriormente.

144. Consideremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z + 6t - 3u = 9 \\ -2x + y - t + 4u = 2 \\ 3x - y + 2z + 4t + u = 9 \\ x + 4y - z + 4t - 4u = 4 \end{array}\right\}$$

En este caso (también compatible indeterminado) DERIVE presenta problemas al resolverlo "en las incógnitas" **x**, **y**, **z** y **t**, debido a que el menor (submatriz formada por sus coeficientes) correspondiente a las cuatro primeras columnas (las de *x*, *y*, *z* y *t*) tiene determinante 0. En cambio, si lo resolvemos en las incógnitas **x**, **y**, **z** y **u**, DERIVE proporciona la solución correcta:

[x=2-t, y=2-t, z=2-t, u=1]

El menor correspondiente a las columnas de estas incógnitas tiene por determinante 229, que es distinto de 0. Si elegimos la forma escalonada de Gauss que proporciona ROW_REDUCE(B), no hay ningún problema. En general, los problemas de SOLVE ocurren cuando el número de ecuaciones es inferior al de incógnitas. Esto se puede obviar incluyendo ecuaciones ficticias del tipo **0x=0** hasta completar el número de incógnitas.

145. Resolvamos los 2 sistemas matricialmente. Tendrás expresiones similares a

$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [x, y, z], \text{Real}\right)$$

146. Resuelve el primer sistema reduciendo la matriz a su forma escalonada por filas,. Tendrás una expresión similar a:

$$\text{ROW\_REDUCE}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 18 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utiliza la ayuda para conocer esta función interna.

147. Resuelve el primer sistema, estudiando que la matriz de coeficientes es invertible y utilizando $X = A^{-1} \cdot B$

Será útil conocer las funciones internas: RANK(A), DET(A)

148. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 10 \\ x + 4y + 5z = 31 \end{cases}$ de todas las formas que puedas.

149. Consideremos el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z + at = 0 \\ ax + 5y + 6z - 4t = 0 \\ 4x + 5y - 2z + at = 0 \\ ax + 8y + 24z - 19t = 0 \end{array}\right\}$$

(y por tanto siempre compatible) Al resolverlo con DERIVE se obtiene únicamente la solución trivial $x = y = z = t = 0$. Sin embargo, al pedir DET(M), siendo M la matriz de coeficientes del sistema, obtenemos:

DET(M) = -69(a+4)(a-3) DERIVE ha simplificado la expresión sin tener en cuenta el caso de $a = 3$ ni a=–4. En efecto, si sustituimos a por 3 y resolvemos, obtenemos infinitas soluciones

150. Discutir, según los valores del parámetro a, el sistema $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$.

Ni ROW_REDUCE ni SOLVE proporciona todas las soluciones. Debes hallar los determinantes.

151. Discutir según el valor del parámetro a los sistemas

a) $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ x-y+az=a \\ 2x+ay+2z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+ay-3z=-1 \\ ax-3y+4z=5 \\ 4x+y+10z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-4y+z=a \\ y-z=6 \\ -x-3z=a \\ 4x-2y=11 \end{cases}$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

SIMULACIÓN DEL AZAR

152. Vamos a definir una función que genere automáticamente un número n de lanzamientos. Introduce
y simplifica:

TIRADAS(n):= VECTOR(1+RANDOM(6),k,1,n)

Simula el lanzamiento de 50 dados introduciendo y simplificando TIRADAS(50).

Definamos una nueva función que muestre solo las ocurrencias de un valor **m** en **n** tiradas.

Introduce y simplifica:

OCURRENCIAS(m,n):= SELECT(x=m,x,TIRADAS(n))

Utilízala para hallar cuántas veces aparece el 3 al lanzar un dado 25 veces. Para ello introduce y simplifica **OCURRENCIAS(3,25)**.

Por último, definamos una función que cuente automáticamente el número de ocurrencias o su frecuencia relativa. Introduce y simplifica:

CONTAR(m,n):=DIMENSION(OCURRENCIAS(m,n))

FR(m,n):=CONTAR(m,n)/n

Simula el lanzamiento de un dado 500 veces y halla la frecuencia relativa con que aparece el 5.

Para ello, introduce y simplifica la expresión **FR(5,500)**. ¿Se acerca al valor esperado?

LA FRECUENCIA RELATIVA SE APROXIMA A LA PROBABILIDAD. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Vamos a obtener la frecuencia relativa del 2 al lanzar un dado 10, 20, 30, 40 y 50 veces.

Para hacerlo automáticamente, introduce y simplifica (o aproxima) la siguiente expresión:

VECTOR([n,FR(2,n)],n,10,50,10)

Se generará una lista de pares de valores [n,FR(2,n)] desde n=10 hasta n=50 con incrementos de10.

Representa los puntos generados:

Introduce la expresión **VECTOR(VECTOR([n,FR(m,n)],n,100,1000,100),m,1,6)**, simplifícala (no te asustes) y represéntala. Se trata de las gráficas de las frecuencias relativas para los 6 valores del dado (m = 1 hasta m = 6).

Regresa a la pantalla de expresiones e introduce **y=1/6**. Represéntalo también. Se trata de la línea horizontal que marca la probabilidad teórica.

Limpia la gráfica y repite la práctica varias veces. Basta situar el cursor sobre las expresiones correspondientes sin reescribirlas.

Sitúa el cursor sobre la expresión que definía FR para resaltarla. Abre la ventana de introducción de datos pulsando el icono correspondiente. Una vez abierta pulsa F3. La expresión resaltada se copiará y podrás modificarla sin reescribirla completa.

Cambia el 6 que aparece en RANDOM(6) por 10. Vamos a simular la extracción y anotación del número de una carta en una baraja de 10 cartas por palo. Repite la práctica realizada con el lanzamiento de dados. Deberás sustituir 6 por 10 en la expresión VECTOR y 1/6 por 1/10 en la probabilidad teórica.

Para simular el lanzamiento de una moneda sustituye el 10 por 2 (1=cara, 2=cruz).

Considera el lanzamiento de una moneda y un dado. Escribe los 12 sucesos (1, C), (1, +), (2, C), (2, +)... y numéralos.

Aplícale el procedimiento anterior sustituyendo 2 por 12.

APROXIMACIÓN BINOMIAL - NORMAL

153. Introduce la función de densidad de la distribución normal $N(0, 1)$ para representarla gráficamente. Para ello introduce la siguiente expresión:

FN(x) := 1 / √(2 π) ê^(-x^2/2)

Para considerar la distribución $N(m, s)$ introduce la expresión:

FN2(x,m,s) := FN((x-m)/s)

Representa las funciones **FN(x)**, **FN2(x,0,1)**, **FN2(x,0,2)** y **FN2(x,0,3)** y observa el efecto de la desviación típica en la gráfica correspondiente.

Representa las funciones **FN2(x,1,1)**, **FN2(x,2,1)** y **FN2(x,3,1)** y observa el efecto de la media m en la gráfica correspondiente.

Para hallar la probabilidad $P(x = k)$ en una distribución binomial $B(n, p)$ definimos en DERIVE una función **BIN(k,n,p)**. Para ello introduce la siguiente expresión: **BIN(k,n,p):= COMB(n,k) p^(k) (1-p)^(n-k)**

Vamos a representar la función de probabilidad de una distribución $B(5; 0{,}5)$. Para ello obtenemos los seis puntos correspondientes a $P(x = k)$ con $k = 0$ hasta $k = 5$.

Introduce las coordenadas de los puntos en forma de matriz pulsando el icono , y eligiendo 6 filas y 2 columnas.

La rellenamos con los siguientes valores:

0	BIN(0,5,0.5)
1	BIN(1,5,0.5)
2	BIN(2,5,0.5)
3	BIN(3,5,0.5)
4	BIN(4,5,0.5)
5	BIN(5,5,0.5)

En este caso la media es $m = n\ p = 2{,}5$ y la desviación típica es $s = \sqrt{(n\ p\ q)} = \sqrt{1.25}$.

Representa la función correspondiente **FN2 (x , 2.5, √ 1.25)** y comprueba la aproximación de las gráficas.

También puedes representar directamente la función BIN(x,5,0.5) aunque DERIVE interpreta *x* como una variable continua.

154. Tenemos una urna con 10 bolas: 6 marcadas con el número 1, 3 marcadas con el 2 y una marcada con el 3.
a) Simula la extracción de 1000 bolas con devolución y halla la frecuencia relativa de obtener 1, 2 o 3 y compara con la probabilidad de cada caso.
b) Repetimos 1000 veces la extracción de 5 bolas. El número de veces que sale el 1 en cada una de las 1000 extracciones es 0, 1, 2, 3, 4 o 5. Halla la frecuencia relativa de cada caso. Observa que es similar a la distribución binomial(5,0.6) y por tanto una normal de media 3 y desviación típica 0.2.

Problema de triángulo:

155. Dados los vértices de un triángulo, halla el baricentro y estudia si un punto es interior o exterior a él.

Utilidades:

En Derive 6\Math\DifferentiationApplications.mth podemos utilizar:

TANGENT(y, x, x0) es la recta tangente a la expresión y(x) en x=x0. El resultado será una recta con variable x.

En Derive 6\Math\GraphicsFunctions.mth podemos:

AreaUnderCurve(u, x, a, b, y) sombrea el área bajo la gráfica de la función y=u(x) hasta el eje OX en el intervalo [a,b] (a < b). Por ejemplo, para la función y = x + cos(x) en [0,3], represente la expresión

AreaUnderCurve(x + COS(x), x, 0, 3, y).

AreaBetweenCurves(u, v, x, a, b, y) sombrea el área comprendida entre las gráficas de las funciones y=u(x) y y=v(x) desde x = a hasta b (a < b). Por ejemplo, para representar el área comprendida entre y = sin(2x) y v(x) = cos(3x) desde x = -pi a pi, represente

AreaBetweenCurves(SIN(2·x), COS(3·x), x, -pi, pi, y)

No es necesario funciones especiales, podemos utilizar las funciones booleanas:
Para representar el área comprendida entre $x = y^2$ y x = sin(y) para y = -2 hasta 2, represente gráficamente la expresión

x=y^2 OR x=SIN(y) OR ((x-y^2)·(x-SIN(y)) <= 0 AND -2 <= y <= 2)
La condición (x-y^2)·(x-SIN(y)) <= 0 nos obliga a representar los puntos (x,y) que están entre ambos.